

PHẦN A. LÝ THUYẾT

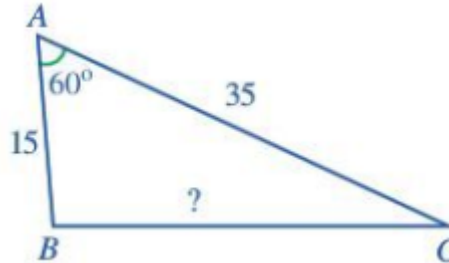
I. Tính các cạnh và góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 35, A = 60^\circ$.



Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

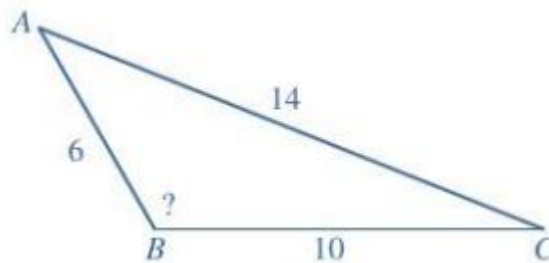
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925. \end{aligned}$$

Do đó $BC = \sqrt{925} \approx 30,4$.

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}}.$$

Do đó $\hat{B} \approx 95^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6, BC = 10, CA = 14$.



Tính số đo góc B .

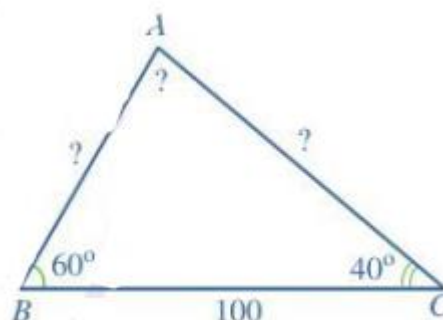
Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -0,5$$

Do đó $\hat{B} = 120^\circ$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $BC = 100, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$.



Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3.$$

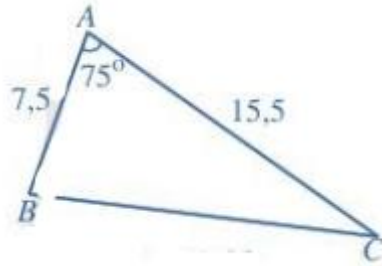
$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$

II. Tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 7,5; AC = 15,5; A = 75^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

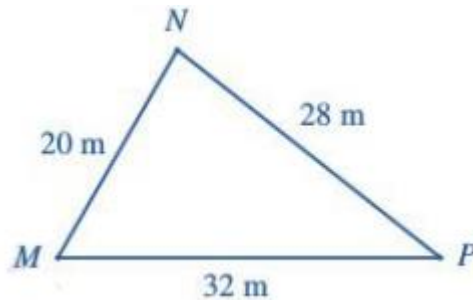
**Giải**

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15,5 \cdot \sin 75^\circ \approx 56,1.$$

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ 5. Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20m, NP = 28m, MP = 32m$.



Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

Giải

$$\text{Ta có: } p = \frac{20 + 28 + 32}{2} = 40(m).$$

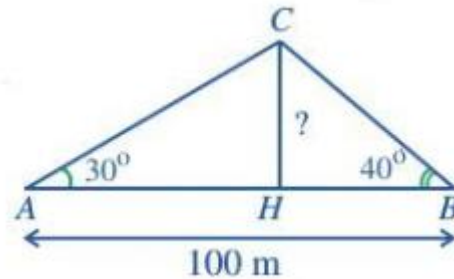
Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)} \approx 277,1(m^2).$$

III. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Ví dụ 6. Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30° . Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng $100m$ và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40° .

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Giải

Xét tam giác ABC (ở hình trên) ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

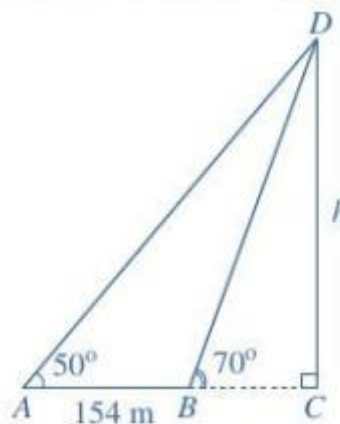
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

Do đó $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68,4(m)$.

Xét tam giác vuông AHC , ta có: $CH = AC \cdot \sin 30^\circ \approx 68,4 \cdot 0,5 \approx 34,2(m)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng $34,2m$.

Ví dụ 7. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh họa lại kết quả đo đạc ở hình dưới. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Giải

Xét tam giác ABD , sử dụng tính chất góc ngoài, ta có: $\hat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD , ta có:

$$\frac{BD}{\sin \hat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \hat{ADB}}$$

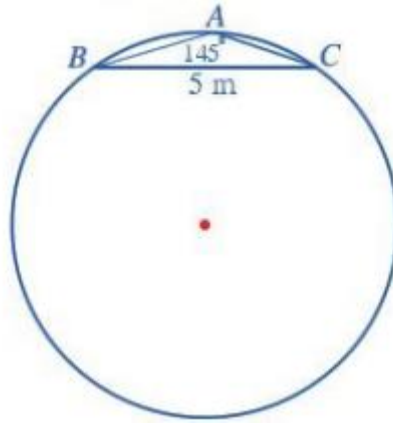
Do đó $BD = \frac{154 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345(m)$.

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

$$CD = BD \cdot \sin \hat{CBD} \approx 345 \cdot \sin 70^\circ \approx 324(m)$$

Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng $324m$.

Ví dụ 8. Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5m$, $\hat{BAC} = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Giải

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

$$\text{Do đó } R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36(m).$$

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69(m^2)$.

Tìm hiểu thêm

Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, p và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC .

1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Chứng minh

Gọi D là trung điểm của BC (Hình 33), ta có:

$$AD = m_a, BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABD , ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos ABD = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca \cdot \cos B.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau: $r = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Giải tam giác

Câu 1. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 14, A = 60^\circ, B = 40^\circ$.

b) $b = 4,5, A = 30^\circ, C = 75^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$.

Có $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,1$ và $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,3$.

b) Ta có $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$ vì $B = C$ nên tam giác cân tại A .

Suy ra $c = b = 4,5$ và $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 2,3$.

Câu 2. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 35, A = 40^\circ, C = 120^\circ$.

b) $a = 137,5, B = 83^\circ, C = 57^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ + 120^\circ) = 20^\circ$.

Từ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, ta suy ra

$a = \frac{c \sin A}{\sin C} \approx 26$; $b = \frac{c \sin B}{\sin C} \approx \frac{35 \cdot 0,43}{0,87} \approx 13,8$.

b) Ta có $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$.

Từ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, ta suy ra

$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{137,5 \cdot 0,9925}{0,6427} \approx 212,3$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{137,5 \cdot 0,8387}{0,6427} \approx 179,4$.

Câu 3. Giải tam giác ABC , biết $a = 6,3; b = 6,3; C = 54^\circ$.

Lời giải

Ta có $a = b = 6,3$ nên tam giác ABC cân tại C .

Suy ra $A = B = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$.

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC ta có

$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{6,3 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 5,72$.

Vậy $A = B = 63^\circ$, $c \approx 5,72$.

Câu 4. Giải tam giác ABC , biết $b = 32$; $c = 45$; $A = 87^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{32^2 + 45^2 - 2.32.45.\cos 87^\circ} \approx 53,84.$$

Vì $b < c < a$ nên $B < C < A$, suy ra tam giác ABC có ba góc nhọn. Áp dụng định lí sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B \approx \frac{32.\sin 87^\circ}{53,84} \approx 0,594.$$

Suy ra $B \approx 36^\circ$, do đó $C = 180^\circ - (A + B) \approx 57^\circ$.

Vậy $a \approx 53,84$, $B \approx 36^\circ$, $C \approx 57^\circ$.

Câu 5. Giải tam giác ABC , biết $a = 7$; $b = 23$; $C = 130^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 130^\circ} \approx 28,02.$$

Vì $C = 130^\circ$ nên A, B là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} \Leftrightarrow \sin A \approx \frac{7.\sin 130^\circ}{28,02} \approx 0,191.$$

Suy ra $A \approx 11^\circ$, do đó $B = 180^\circ - (A + C) \approx 39^\circ$.

Vậy $c \approx 28,02$, $A \approx 11^\circ$, $B \approx 39^\circ$.

Câu 6. Giải tam giác ABC , biết $b = 14$; $c = 10$; $A = 145^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin, ta có

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{14^2 + 10^2 - 2.14.10.\cos 145^\circ} \approx 22,92.$$

Vì $A = 145^\circ$ nên C, B là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} \Leftrightarrow \sin B \approx \frac{14 \cdot \sin 145^\circ}{22,92} \approx 0,35.$$

Suy ra $B \approx 21^\circ$, do đó $C = 180^\circ - (A + B) \approx 14^\circ$.

Vậy $c \approx 22,92$, $B \approx 21^\circ$, $C \approx 14^\circ$.

Câu 7. Giải tam giác ABC , biết $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2 \cdot 18 \cdot 20} = \frac{11}{15} \Rightarrow A \approx 43^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2 \cdot 14 \cdot 18} = \frac{17}{35} \Rightarrow B \approx 61^\circ.$$

Khi đó $C = 180^\circ - (A + B) \approx 76^\circ$.

Vậy $A \approx 43^\circ$, $B \approx 61^\circ$, $C \approx 76^\circ$.

Câu 8. Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 5$; $c = 7$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{29}{35} \Rightarrow A \approx 34^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7} \Rightarrow B \approx 44^\circ.$$

Khi đó $C = 180^\circ - (A + B) \approx 102^\circ$.

Vậy $A \approx 34^\circ$, $B \approx 44^\circ$, $C \approx 102^\circ$.

Câu 9. Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7,3^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 7,3 \cdot 4,8} = \frac{4033}{7008} \Rightarrow A \approx 55^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 4,8^2 - 7,3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4,8} = \frac{115}{1152} \Rightarrow B \approx 84^\circ.$$

Khi đó $C = 180^\circ - (A + B) \approx 41^\circ$.

Vậy $A \approx 55^\circ$, $B \approx 84^\circ$, $C \approx 41^\circ$.

Câu 10. Giải tam giác ABC , biết $B = 60^\circ$; $C = 45^\circ$; $BC = a$.

Lời giải

Ta có $A = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$.

Áp dụng định lý sin, ta có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} \Leftrightarrow b \approx 0,897a.$$

$$\text{Tương tự ta có } c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx 0,732a.$$

Vậy $A = 75^\circ$, $b \approx 0,897a$, $c \approx 0,732a$.

Dạng 2. Tính diện tích tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a .

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R, r

Lời giải.

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

$$\text{Ta có } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}7.h_a \Rightarrow h_a = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

b) Ta có $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ (vì $\sin A > 0$).

$$\text{Mà } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$$

Theo Định lý Cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$$\text{Từ } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Theo định lý sin: } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{5+7+4\sqrt{2}} = \frac{14}{12+4\sqrt{2}} = \frac{7}{6+2\sqrt{2}}$$

Câu 2. Cho tam giác ABC , biết $a = 21, b = 17, c = 10$

- a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a .

Lời giải.

a) Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21+17+10}{2} = 24$

Theo công thức Hê-rông, ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$$

Do đó: $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$.

b) Ta có $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3,5$.

Độ dài trung tuyến $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{17^2 + 10^2}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{337}{4} = 84,25$

Câu 3. Cho tam giác ABC , có $A = 60^\circ, b = 20, c = 25$.

- a) Tính diện tích S và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Lời giải.

a) Ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 125\sqrt{3}$

Hơn nữa $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20^2 + 25^2 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 925$

Vậy $a = \sqrt{925} \approx 30,41$

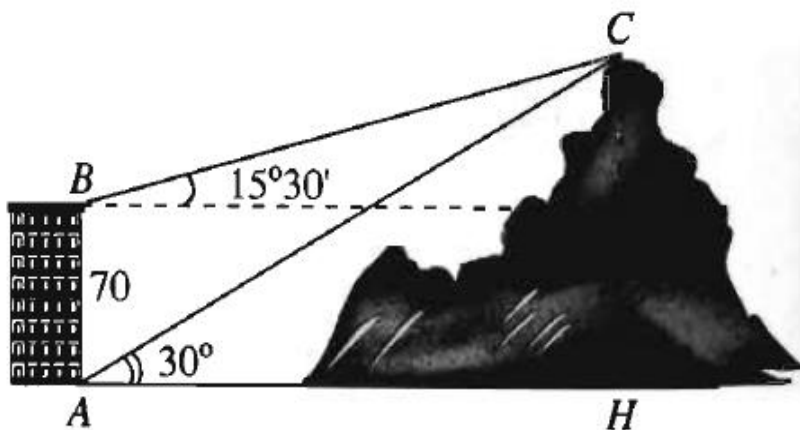
Từ công thức $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{250\sqrt{3}}{\sqrt{925}} \approx 19,94$

b) Từ công thức $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}} \approx 17,56$

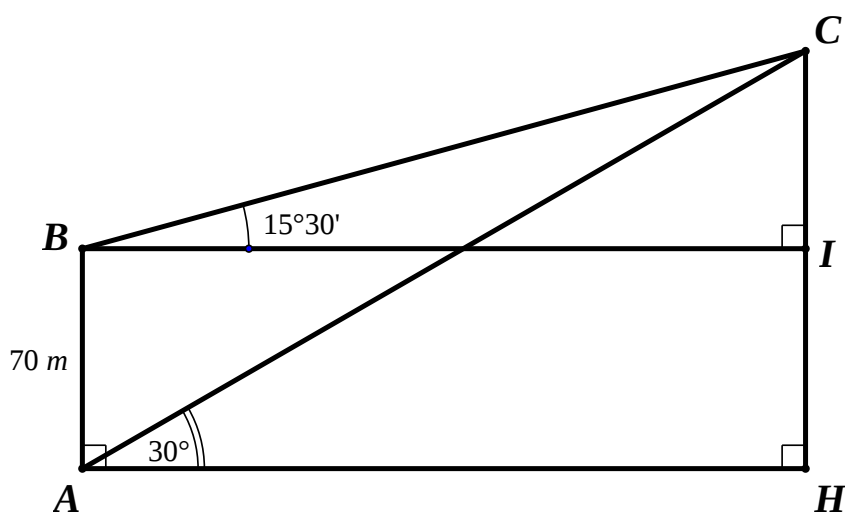
Từ công thức $S = pr$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$ ta có $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{bc \sin A}{a+b+c} = \frac{20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925} + 20 + 25} \approx 7,10$

Dạng 3. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Câu 1. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao CH của ngọn núi so với mặt đất.



Lời giải



Cách 1:

+ Ta có: $\tan CAH = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 30^\circ}$.

+ Lại có: $\tan CBI = \frac{CI}{BI} \Rightarrow BI = \frac{CI}{\tan 15^\circ 30'} = \frac{CH - 70}{\tan 15^\circ 30'}$.

+ Do $AH = BI$ nên $\frac{CH}{\tan 30^\circ} = \frac{CH - 70}{\tan 15^\circ 30'} = \frac{70}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'}$.

+ Vậy $CH = \frac{70 \cdot \tan 30^\circ}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'} \approx 134,7 \text{ m}$.

Cách 2:

+ Ta có: $ABC = 90^\circ + 15^\circ 30' = 105^\circ 30'$.

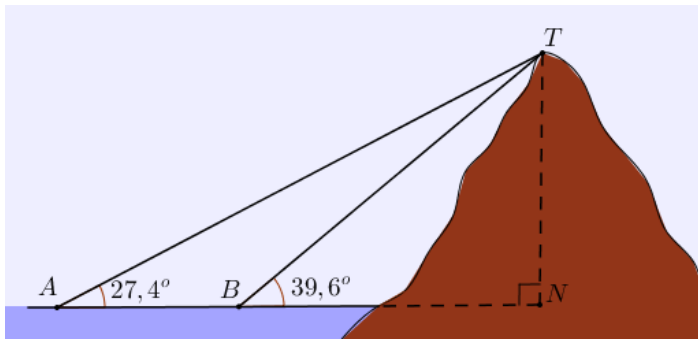
$$ACB = 180^\circ - ABC - BAC = 180^\circ - 60^\circ - 105^\circ 30' = 14^\circ 30'.$$

+ Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AC}{\sin ABC} = \frac{AB}{\sin ACB} \Rightarrow AC = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'}.$$

+ Lại có: $\sin CAH = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \cdot \sin 30^\circ \approx 134,7 \text{ m}$.

Câu 2. Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?



Lời giải

Ta có $ATB = TBN - TAN = 12,2^\circ$.

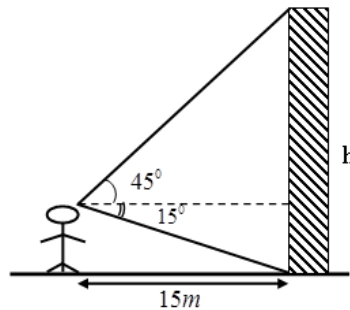
Áp dụng định lí sin cho tam giác TAB: $\frac{TB}{\sin TAB} = \frac{AB}{\sin ATB} \Rightarrow TB = \frac{AB \cdot \sin TAB}{\sin ATB}$.

Xét tam giác vuông TBN ta có:

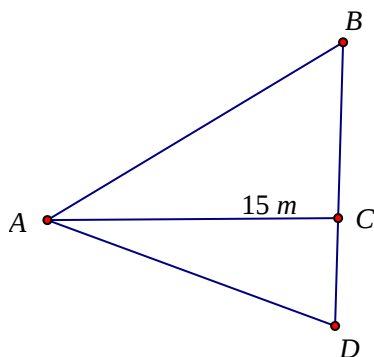
$$TN = TB \cdot \sin TBN = \frac{AB \cdot \sin TAB \cdot \sin TBN}{\sin ATB} = \frac{1536 \cdot \sin 27,4^\circ \cdot \sin 39,6^\circ}{\sin 12,2^\circ} \approx 2132,14.$$

Vậy chiều cao ngọn núi xấp xỉ 2132,14 m.

Câu 3. Một người quan sát đứng cách một cái tháp 15m, nhìn thấy đỉnh tháp một góc 45° và nhìn dưới chân tháp một góc 15° so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.



Lời giải



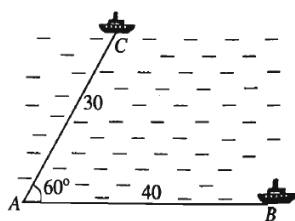
Ta có $BC = AC \cdot \tan BAC = 15 \cdot \tan 45^\circ = 15 \text{ (m)}$

$$CD = AC \cdot \tan DAC = 15 \cdot \tan 15^\circ = 15(2 - \sqrt{3}) \text{ (m)}$$

$$h = BD = BC + CD = 45 - 15\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của tháp là $45 - 15\sqrt{3} \text{ (m)}$.

- Câu 4.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý?



Lời giải

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lý, tàu C đi được 30 hải lý. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $A = 60^\circ$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lý).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lý.

- Câu 5.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



Lời giải

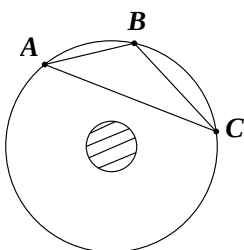
Áp dụng định lý Cô sin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 0,28 \text{ km}.$$

Vậy thời gian du khách chèo thuyền từ C đến B là: $t = \frac{BC}{v} = \frac{0,28}{4} = 0,07$ giờ = 4,2 phút.

- Câu 6.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nêu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?

Lời giải



Lấy ba điểm A, B, C khác nhau trên đường tròn (ở các điểm ngoài cùng của đảo). Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a, AC = b, AB = c$. Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác ABC .

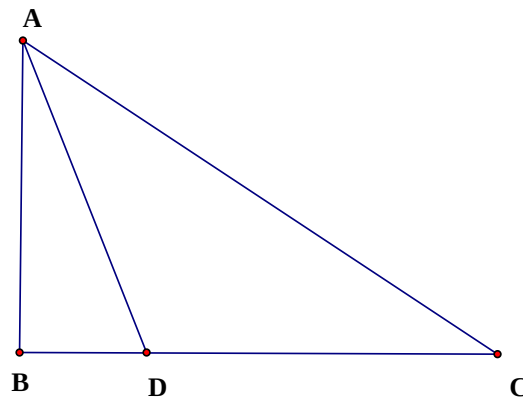
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Lại có: } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

Vậy bán kính của đảo được tính theo công thức: $R = \frac{abc}{4S}$.

Câu 7. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao AB của một tòa tháp với B là chân tháp và A là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm C và D có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm B, C, D thẳng hàng người ta đo các góc $BCA = 43^\circ$ và góc $BDA = 67^\circ$. Hãy tính chiều cao AB của tòa tháp

Lời giải



Trong tam giác ACD : có góc $CAD = 67^\circ - 43^\circ = 24^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD ta có:

$$\frac{AD}{\sin 43^\circ} = \frac{CD}{\sin 24^\circ} \Rightarrow AD = \frac{30 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 50,30(m)$$

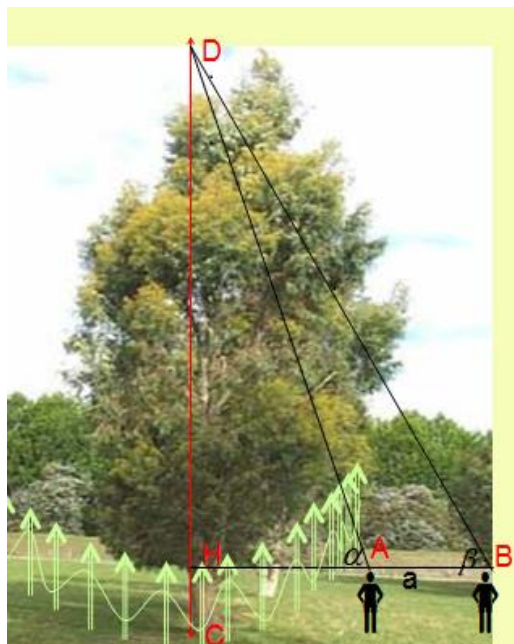
Trong tam giác vuông BAD ta có $\sin 67^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB = 50,30 \cdot \sin 67^\circ = 46,30(m)$

Vậy chiều cao của tòa tháp là $46,30(m)$

Câu 8. Trong tam giác vuông AHC ta có $AH = AC \cdot \cos HAC \approx 6,30 \cdot \cos 35^\circ \approx 5,16$ (km).

Từ hai vị trí A, B người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy C là điểm gốc cây, D là điểm ngọn cây.

A, B cùng thẳng hàng với điểm H thuộc chiều cao CD của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của cây đó.



Lời giải

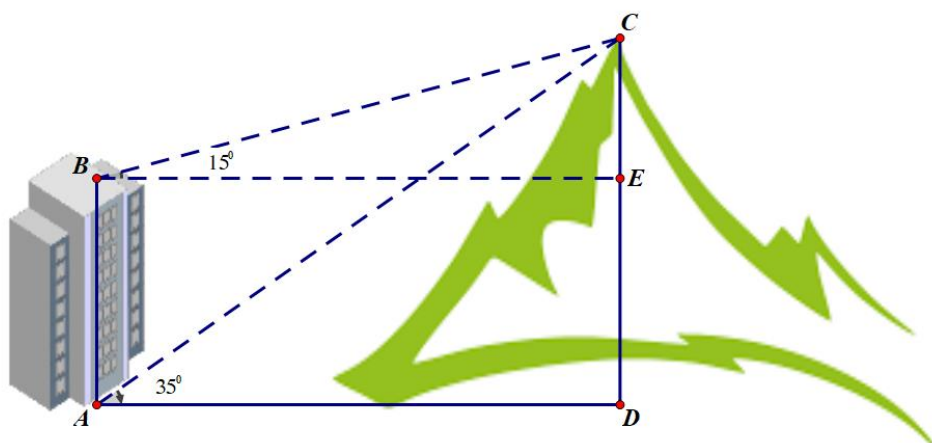
Ta có $\alpha = 63^\circ \Rightarrow \angle BAD = 117^\circ \Rightarrow \angle ADB = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có: $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}$

Tam giác BHD vuông tại H nên có: $\sin \angle HBD = \frac{HD}{BD} \Rightarrow HD = BD \cdot \sin \angle HBD$

Vậy $HD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD \cdot \sin \angle HBD}{\sin \angle ADB} = \frac{10 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 25,58m$.

Câu 9. Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang 35° và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang 15° (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.



Lời giải

Ta có: $\angle CBA = \angle CBE + \angle EBA = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ \Rightarrow \angle BCA = 180^\circ - (\angle CBA + \angle BAC) = 20^\circ$

Áp dụng định lý hàm sin cho $\triangle CBA$ ta có

$$\frac{AB}{\sin(BCA)} = \frac{AC}{\sin(CBA)} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin(CBA)}{\sin(BCA)} = \frac{60 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 20^\circ} = 169,4506909(m)$$

Xét $\triangle CAD$ vuông tại D , ta có $CD = AC \cdot \sin(CAD) \approx 97,193(m)$.

Dạng 4. Nhận dạng tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

- a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;
- b) Góc A tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;
- c) Góc A vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$;

Lời giải

$$\text{a) Góc } A \text{ nhọn} \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2;$$

$$\text{b) Góc } A \text{ tù} \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2;$$

$$\text{c) Góc } A \text{ vuông} \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Câu 2. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải

Ta có $a^3 = b^3 + c^3$ nên a là cạnh lớn nhất, suy ra A là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^3 = b^3 + c^3 = b \cdot b^2 + c \cdot c^2 < a \cdot b^2 + a \cdot c^2 = a(b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc A nhọn, dẫn đến tam giác có ba góc nhọn.

Câu 3. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

Ta có $a^4 = b^4 + c^4$ nên a là cạnh lớn nhất, suy ra A là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^4 = b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 < (b^2 + c^2)^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc A nhọn, dẫn đến ABC là tam giác nhọn.

Câu 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin A = 2 \sin B \cdot \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$$

Vậy ABC là tam giác cân tại A .

Câu 5. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $C = 30^\circ$. Chứng minh ABC là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao h_a của tam giác.

Lời giải

$$\text{Theo định lý cosin ta có } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$$

Do đó $c = 2 = b$ nên tam giác ABC cân tại A có góc $B = C = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}, h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1.$$

Câu 6. Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos B}{\sin B} &= \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} - 1 = \frac{2a + c}{2a - c} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Câu 7. Cho tam giác ABC có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ nên}$$

$$h_a = \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = a\sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)} = a$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có } 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq (p-b) + (p-c) = 2p - b - c = a.$$

$$\text{Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên } p - b = p - c \Leftrightarrow b = c.$$

Vậy tam giác ABC cân tại A .

Câu 8. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

Lời giải

Áp dụng định lý trung tuyến ta có:

$$5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5(2b^2 + 2c^2) - 5a^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 \Leftrightarrow 9b^2 + 9c^2 = 9a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A .

Câu 9. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng r và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng bằng r_a, r_b, r_c . Chứng minh rằng nếu $r = r_a - r_b - r_c$ thì góc A là góc vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có } r_a = \frac{S}{p-a}, \text{ tương tự } r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}.$$

$$\text{Mặt khác từ công thức diện tích có } r = \frac{S}{p}.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Rightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}.$$

Vì

$$2p-(b+c) = a \Rightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c);$$

$$pa = p(p+c) - bc \Rightarrow bc = p(b+c-a) = \frac{b+c+a}{2}(b+c-a)$$

$$\Rightarrow 2bc = (b+c)^2 - a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Theo định lý Pitago ta có $A = 90^\circ$.

Câu 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$. Chứng minh góc $C = 60^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 \Rightarrow a^3 + b^3 - c^3 = (a+b)c^2 - c^3$$

$$\text{Suy ra } a^3 + b^3 = (a+b)c^2 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 11. Cho tam giác ABC biết $a = 7, b = 8, c = 5$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60°

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

Câu 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + c^4 = 0$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60° hoặc 120° .

Lời giải

Xét đẳng thức đã cho là phương trình bậc 2 theo $t = c^2$.

$$\text{Ta có: } \Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + a^2b^2 + c^4) = a^2b^2.$$

$$\text{Do đó } c^2 = a^2 + b^2 \pm ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \cos C = a^2 + b^2 \pm 2ab.$$

$$\text{Suy ra } \cos C = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ \text{ hay } 120^\circ.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a + b + c = 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Ta có $a = b \cos C + c \cos B, b = c \cos A + a \cos C, c = a \cos B + b \cos A$ nên điều kiện đã cho tương đương với $(a - b)(\cos A - \cos B) + (b - c)(\cos B - \cos C) + (c - a)(\cos C - \cos A) = 0$.

Ta chứng minh $(a - b)(\cos A - \cos B) \leq 0$, dấu “=” khi $a = b$.

Xét $a = b$ thì bất đẳng thức đúng.

Xét $a > b$ thì $A > B \Rightarrow \cos A < \cos B \Rightarrow (a - b)(\cos A - \cos B) < 0$.

Xét $a < b$ thì $A < B \Rightarrow \cos A > \cos B \Rightarrow (a - b)(\cos A - \cos B) < 0$.

Tương tự thì $(b - c)(\cos B - \cos C) \leq 0$ và $(c - a)(\cos C - \cos a) \leq 0$.

Do đó dấu đẳng thức đồng thời xảy ra nên $a = b = c$. Vậy tam giác ABC đều.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $A = 60^\circ, a = 10, r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Ta có $AP = AN = r \cdot \cot 30^\circ = 5$ và $BP + NC = BM + MC = a = 10$.

Từ đó ta có $(b - AN) + (c - AP) = 10$ hay $b + c = 20$.

Theo định lý cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$ hay $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - bc$.

$$\text{Suy ra } bc = \frac{(b + c)^2 - a^2}{3} = \frac{20^2 - 10^2}{3} = 100.$$

Mà $b + c = 20$ nên b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $b=c=10$ nên ABC là tam giác đều.

Câu 15. Xét tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3+c^3-b^3}{a+c-b}=b^2$ và $\sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a^3+c^3-b^3}{a+c-b}=b^2 \Rightarrow a^3+c^3-b^3=(a+c)b^2-b^3.$$

$$\Rightarrow a^3+c^3=(a+c)b^2 \Rightarrow a^2-ac+c^2=b^2.$$

$$\Rightarrow a^2-ac+c^2=a^2+c^2-2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 B = \frac{3}{4} \text{ nên } \sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4} = \sin^2 B \Rightarrow \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$$

Vậy ABC là tam giác cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Câu 16. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là một điểm tùy ý.

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 + 3\overrightarrow{GM} \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

$$\text{Ta có } (x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, với mọi điểm M , ta có

$$(m_a + m_b + m_c)^2 = \frac{9}{4}(GA + GB + GC)^2 \leq \frac{9}{4} \cdot 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \leq \frac{27}{4}(MA^2 + MB^2 + MC^2)$$

Thay M bởi tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta được

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{27}{4} \cdot 3R^2 = \frac{81}{4}R^2.$$

$$\text{Suy ra } m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R.$$

Vậy nếu ABC là tam giác đều thì có $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$. (1)

Ngược lại nếu giả sử tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (1). Thay điểm M bằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABC , ta có $3R^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3OG^2$.

$$\text{Suy ra } \frac{81}{4}R^2 = 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{81}{4}OG^2 \geq (m_a + m_b + m_c)^2 + \frac{81}{4}OG^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{81}{4}R^2 \geq \frac{81}{4}R^2 + \frac{81}{4}OG^2 \Rightarrow OG^2 = 0 \text{ hay } O \equiv G.$$

Vậy ABC là tam giác đều.

Câu 17. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lý cô-sin và sin ta có

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C .

Câu 18. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A (\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b+c}{2R} \Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 + c^2) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Câu 19. Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$.

b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$.

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác ABC đều.

b) Ta có

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4 \sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R} \right)^2 = \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Đường trung tuyến

Câu 1. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

- A. 10 cm. B. 9 cm. C. 7,5 cm. D. 8 cm.

Lời giải

Chọn C

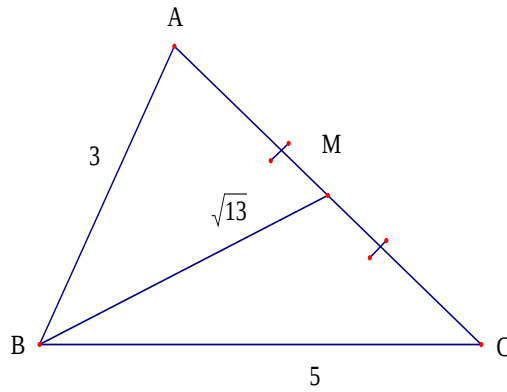
$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9^2 + 12^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2}.$$

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài AC .

- A. $\sqrt{11}$. B. 4. C. $\frac{9}{2}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến;ta có:

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \frac{3^2 + 5^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$$

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $C = 30^\circ$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?

A. 3

B. 4

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$.

Xét $\triangle BAC$ có $B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Xét tam giác ABM có $BM = AM$ và $B = 60^\circ$ suy ra $\triangle ABM$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AB = 3$.

Câu 4. Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{9}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: Trong tam giác ABC có $a = 6 \Rightarrow BC = 6$ mà $BM = 3$ suy ra M là trung điểm BC .

$$\text{Suy ra: } AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC có góc C nhọn, AH và BK là hai đường cao, $HK = \sqrt{7}$, diện tích tứ giác $ABHK$ bằng 7 lần diện tích tam giác CHK . Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. 4.

B. 7.

C. 8.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } S_{ABHK} = 7S_{CHK} \Rightarrow S_{ABC} = 8S_{CHK}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CHK}} = \frac{\frac{1}{2}CA.CB.\sin C}{\frac{1}{2}CK.CH.\sin C} = \frac{CA.CB}{CK.CH} = 8 \quad (1)$$

$$\Delta AHC \text{ vuông tại } H, \text{ ta có } \cos C = \frac{CH}{CA} \quad (2)$$

$$\Delta BKC \text{ vuông tại } K, \text{ ta có } \cos C = \frac{CK}{CB} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } \cos^2 C = \frac{1}{8}$$

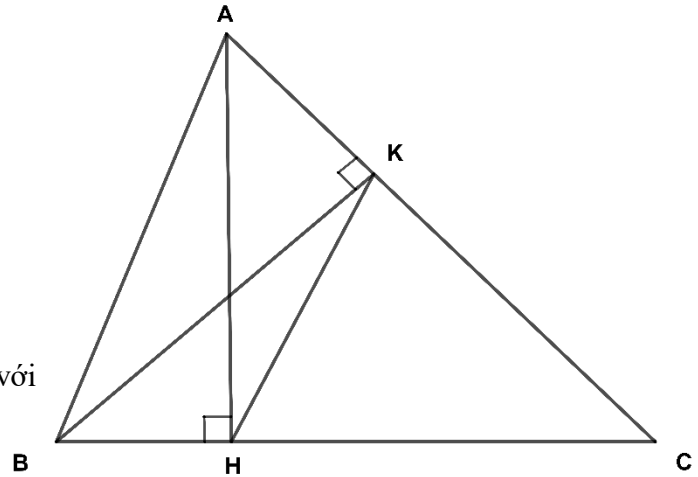
Ta có ΔHCK đồng dạng với

$$\Delta ACB \Rightarrow \frac{HK}{AB} = \frac{CH}{AC} = \cos C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{2}HK = 2\sqrt{14}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{AB}{2\sqrt{1-\cos^2 C}} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{1-\frac{1}{8}}} = 4.$$

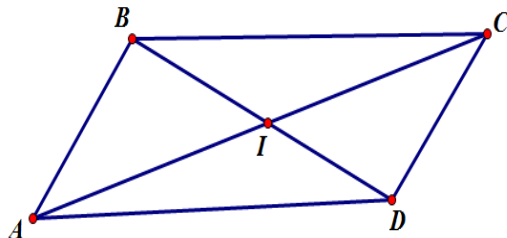


Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4\text{ cm}$; $BC = 5\text{ cm}$; $BD = 7\text{ cm}$. Độ dài đoạn AC bằng bao nhiêu cm ? (Tính chính xác đến hàng phần trăm)

- A. $6,25(\text{cm})$. B. $5,74(\text{cm})$. C. $5,67(\text{cm})$. D. $5,93(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là giao điểm của AC và BD .

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác ABD ta có

$$AI^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{33}{4} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{33}}{2}(\text{cm})$$

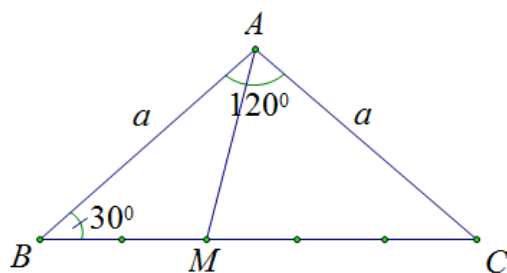
$$\Rightarrow AC = 2AI = 2 \cdot \frac{\sqrt{33}}{2} \approx 5,74(\text{cm}).$$

Câu 7. Cho tam giác ABC cân tại A biết $A = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2}{5}BC$. Tính độ dài AM .

- A. $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $AM = \frac{11a}{5}$. C. $AM = \frac{a\sqrt{7}}{5}$. D. $AM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



+ Áp dụng định lí cosin trong $\triangle ABC$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

+ Áp dụng định lí cosin trong $\triangle ABM$, ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 30^\circ = a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2}{25}.$$

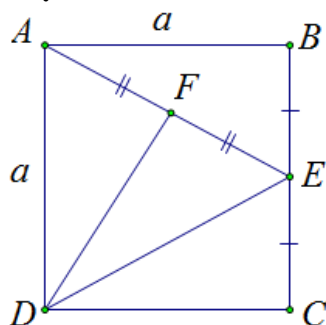
$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC và F là trung điểm cạnh AE . Tính độ dài đoạn thẳng DF .

A. $DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. B. $DF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $DF = \frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD$ là hình vuông và E là trung điểm của BC nên $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng công thức độ dài trung tuyến trong tam giác DAE , ta có

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng a và nội tiếp đường tròn $(O; \sqrt{3})$. Để diện tích tam giác lớn nhất thì $\hat{B}$ bằng

A. 90° . B. 120° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh BC .

Áp dụng định lí Pitago vào $\square ABH$ vuông tại H có: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

Xét $\square ABC$ có $\sin B = \frac{AH}{AB}$, $\cos B = \frac{BH}{AB}$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{AH}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BH}{AB}\right)^2 = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C} < 90^\circ$

$$\text{Ta có } \sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \cos B = \cos C = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4(\sqrt{3})^2}}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2a \cos B \cdot a \sin B = \frac{a^3 \sqrt{4(\sqrt{3})^2 - a^2}}{4(\sqrt{3})^2}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số không âm ta có

$$3\sqrt{3} \sqrt{\frac{a^2}{3} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot (4(\sqrt{3})^2 - a^2)} \leq 3\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + (4R^2 - b^2)}{4}\right)^4} = 3\sqrt{3} (\sqrt{3})^4$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a^2}{3} = 4(\sqrt{3})^2 - a^2 \Leftrightarrow a = 3$.

$$\text{Suy ra } \sin B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

Vậy $\hat{B} = 60^\circ$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $AC = 8$; $AB = 15$; $\cos A = \frac{4}{5}$. Độ dài đường cao AH bằng:

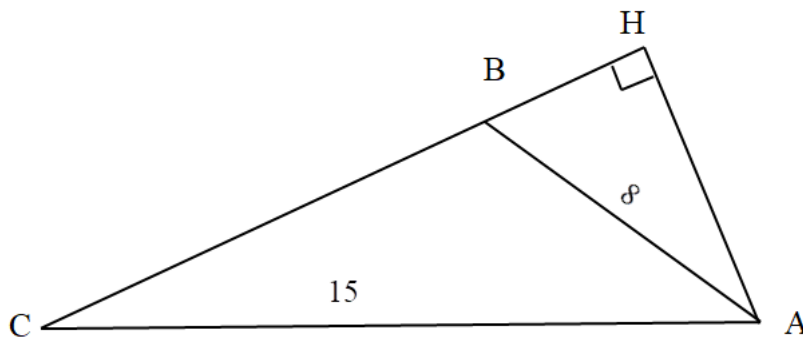
A. $\frac{72}{\sqrt{79}}$.

B. $\frac{72}{97}$.

C. $\frac{\sqrt{72}}{97}$.

D. $\frac{72}{\sqrt{97}}$.

Lời giải



+ Theo định lí côsin ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 97 \Rightarrow BC = \sqrt{97}$.

$$+ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Ta có: $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{9}{25}$. Vì $\sin A > 0 \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5}$.

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 36.$$

$$\text{Ta có } AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{72}{\sqrt{97}}. \text{ Vậy } AH = \frac{72}{\sqrt{97}}.$$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $a=109$, $B=33^{\circ}24'$, góc $C=66^{\circ}59'$. Chu vi tam giác ABC gần bằng số nào sau đây?

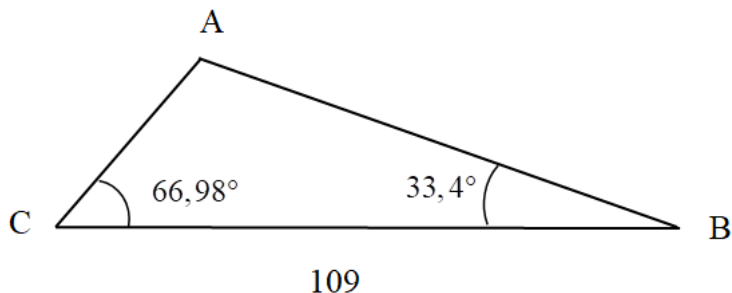
A. 136.

B. 227.

C. 272.

D. 372.

Lời giải



Ta có: $B=33^{\circ}24'=33,4^{\circ}$, $C=66^{\circ}59'\approx 66,98^{\circ}\Rightarrow A\approx 79,62^{\circ}$.

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{a.\sin B}{\sin A}\approx 61$.

Tương tự ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a.\sin C}{\sin A}\approx 102$.

Chu vi tam giác ABC là: $2p=a+b+c\approx 109+61+102=272$.

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ có $AB=2$; $AC=3$; $A=60^{\circ}$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

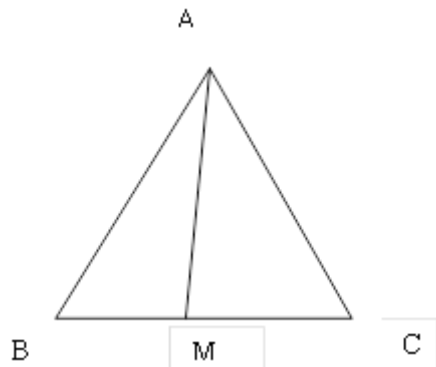
A. $\frac{12}{5}$.

B. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải



Gọi M là chân đường phân giác góc A .

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A=7\Rightarrow BC=\sqrt{7}$.

Lại có $\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$.

Suy ra $BM=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM ta được:

$$AM^2=AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos ABC=AB^2+BM^2-2AB.BM.\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\frac{108}{25}.$$

$$\Rightarrow AM=\frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

- Câu 13.** Cho tam giác ABC , có $m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}$, (với m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và các cạnh $AC = 8$, $AB = 6$). Tính độ dài BC .
- A. $a = 6$. B. $a = 9$. C. $a = 49$. D. $a = 7$.

Lời giải

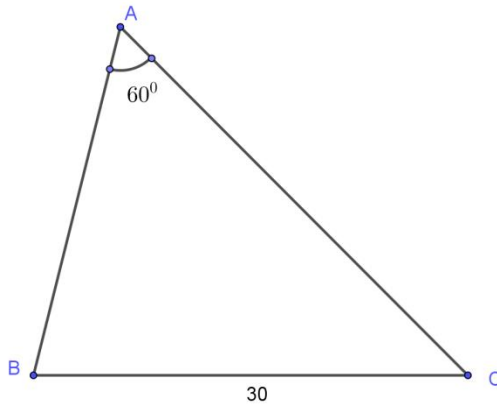
Đặt: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - 4m_a^2} = \sqrt{2(8^2 + 6^2) - 151} = 7.$$

- Câu 14.** Cho tam giác ABC có $A = 60^\circ$, cạnh $a = 30$ bán kính đường tròn nội tiếp $r = 5\sqrt{3}$. Tính tổng độ dài hai cạnh còn lại b, c của tam giác ABC .
- A. 30. B. 60. C. 50. D. 90.

Lời giải

guyên



Áp dụng định lý cosin vào tam giác ABC ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow 900 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow (b + c)^2 - 3bc = 900 \quad (1)$$

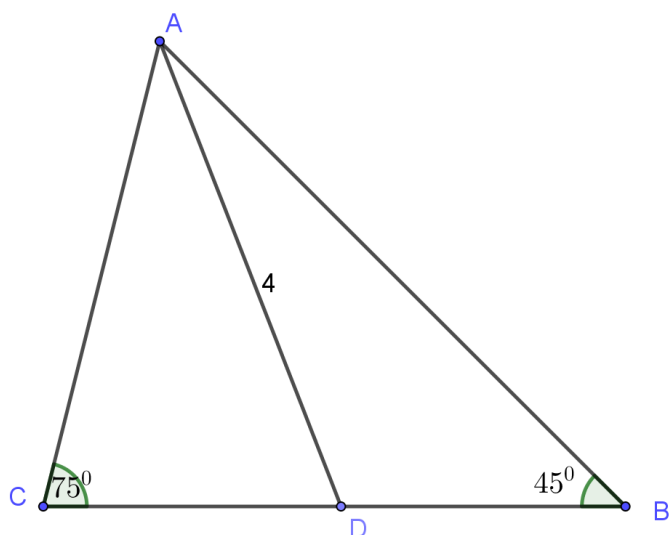
$$\text{Lại có } \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a + b + c}{2}r \Leftrightarrow \frac{bc\sqrt{3}}{2} = (30 + b + c)5\sqrt{3} \Leftrightarrow bc = 300 + 10(b + c) \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có } (b + c)^2 - 30(b + c) - 900 = 900 \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 60(tm) \\ b + c = -30(l) \end{cases}$$

Vậy $b + c = 60$.

- Câu 15.** Cho tam giác ABC có $B = 45^\circ$, $C = 75^\circ$ và phân giác trong $AD = 4$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- A. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. B. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. C. $-4 + 4\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $A = 180^\circ - B - C = 60^\circ$, $ADB = C + DAC = 105^\circ$

Áp dụng định lý sin vào tam giác ADB

$$\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{AD}{\sin ABD} \Rightarrow AB = \frac{\sin ADB}{\sin ABD} \cdot AD = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 4 = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2 \sin 75^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 16. Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{5}$, $AC = 6$, $BC = 5$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $\sqrt{73}$.

B. 8.

C. $\sqrt{55}$.

D. 7.

Lời giải

Vì trong tam giác ABC ta có $A+B$ bù với góc C nên

$$\cos(A+B) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{5} \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = 7.$$

Câu 17. Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 8$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

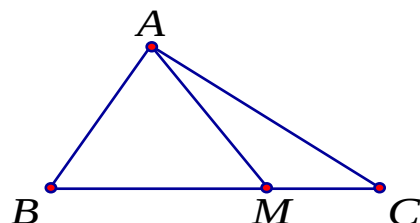
A. $\sqrt{94}$.

B. $\sqrt{106}$.

C. $\sqrt{166}$.

D. $\sqrt{34}$.

Lời giải



$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{34}.$$

Câu 18. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Một điểm I bất kì thuộc miền trong tam giác ABC . Tính tổng khoảng cách từ điểm I đến ba cạnh của tam giác?

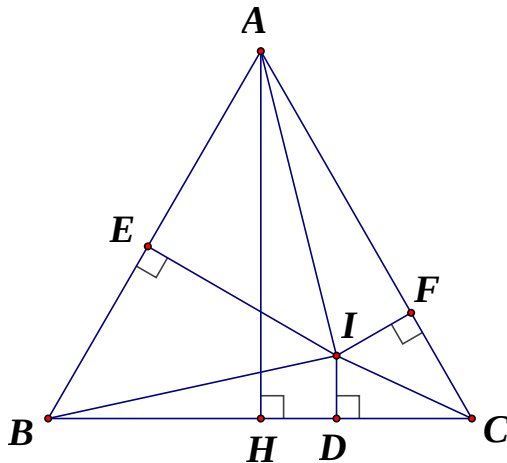
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

D. $2a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của l trên các cạnh BC, AB, AC .

Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó:

$$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}IE \cdot AB + \frac{1}{2}IF \cdot AC + \frac{1}{2}ID \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow AH \cdot BC = (ID + IE + IF) \cdot BC \text{ (Do } ABC \text{ là tam giác đều nên } AB = AC = BC)$$

$$\Leftrightarrow ID + IE + IF = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Vậy tổng khoảng cách từ điểm l đến các cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Câu 19. Tam giác ABC có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6, CN = 9$ và $\angle BGC = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $AB = \sqrt{11}$.

B. $AB = \sqrt{13}$.

C. $AB = 2\sqrt{11}$.

D. $AB = 2\sqrt{13}$.

Lời giải

Ta có: $\angle BGC$ và $\angle BGN$ là hai góc kề bù mà $\angle BGC = 120^\circ \Rightarrow \angle BGN = 60^\circ$

G là trọng tâm của tam giác $DABC$

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM = 4.$$

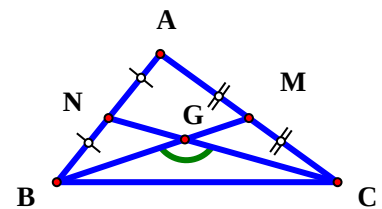
$$\Rightarrow GN = \frac{1}{3}CN = 3.$$

Trong tam giác $DBGN$ ta có:

$$BN^2 = GN^2 + BG^2 - 2GN \cdot BG \cdot \cos \angle BGN$$

$$\Rightarrow BN^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow BN = \sqrt{13}.$$

N là trung điểm của $AB \Rightarrow AB = 2BN = 2\sqrt{13}$.



Dạng 2. Diện tích tam giác

Câu 20. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.

B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.

C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

Câu 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $BAD = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

- A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. a^2 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin BAD = a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a^2.$$

Câu 22. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

- A. $\sqrt{56}$. B. $\sqrt{48}$. C. 6. D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7.$$

Vậy diện tích tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)} = \sqrt{56}.$$

Câu 23. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

- A. 48. B. 24. C. 12. D. 30.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: Nửa chu vi } \triangle ABC: p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Áp dụng công thức Hê-rông: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24.$$

Câu 24. Cho $\triangle ABC$ có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

- A. $5\sqrt{3}$. B. 5. C. 10. D. $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5.$$

Câu 25. Một tam giác có ba cạnh là 13, 14, 15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A. 84. B. $\sqrt{84}$. C. 42. D. $\sqrt{168}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21.$

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84.$

Câu 26. Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{13}{2}$. B. 13. C. 26. D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overline{AB} = (-3;5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}$, $\overline{AC} = (-1;6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}$, $\overline{BC} = (2;1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$.

Mặt khác $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{34} + \sqrt{5}}{2}.$

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{13}{2}.$

Câu 27. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

- A. 12. B. 6. C. $6\sqrt{2}$. D. 9.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overline{AB} = (2;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$, $\overline{AC} = (5;1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$, $\overline{BC} = (3;3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$.

Suy ra: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6.$

Câu 28. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

- A. $9\sqrt{15}$. B. $3\sqrt{15}$. C. 105. D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B.

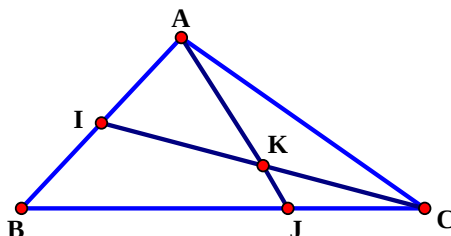
Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9.$

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}.$

Câu 29. Cho tam giác ABC . Biết $AB = 2$; $BC = 3$ và $\angle ABC = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

- A. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. B. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$.

Suy ra $AC = \sqrt{7}$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

Câu 30. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15$, $m_b = 12$, $m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

- A. 72. B. 144. C. 54. D. 108.

Lời giải 1

Chọn A

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$, áp dụng công thức He-rong ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

Cách 2:

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ Suy ra $S_{ABC} = 72$

Câu 31. Cho tam giác ΔABC có $b=7; c=5; \cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

B. 8.

C. $8\sqrt{3}$

D. $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \sin A = \frac{4}{5} \\ \sin A = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vì } 0 \leq A \leq 180^\circ \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ mà } S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Câu 32. Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 4a$ và $BAC = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC ?

A. $S = 8a^2$.

B. $S = 2a^2\sqrt{3}$.

C. $S = a^2\sqrt{3}$.

D. $S = 4a^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích của tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 33. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm } ABC. \text{ Bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = AG = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 34. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12.

B. 3.

C. 6.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

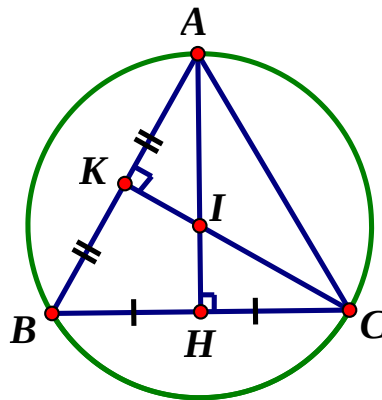
Theo đề bài tam giác ABC có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là $p = \frac{12}{2}$; bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, tức là ta có: $r = 1$.
Diện tích tam giác ABC là: $S = p.r = 6.1 = 6$.

Câu 35. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC ;
I là giao điểm của AH và CK .
Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có: $AH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó: $R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3} + 1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 60^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

Câu 37. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A. 1. B. $\frac{8}{9}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

$$\text{Do đó bán kính đường tròn nội tiếp } r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)} = \frac{3.4}{3+4+5} = 1.$$

Câu 38. Cho $\triangle ABC$ có $S=84, a=13, b=14, c=15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

- A. 8,125. B. 130. C. 8. D. 8,5.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABC} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{13.14.15}{4.84} = \frac{65}{8}.$$

Câu 39. Cho $\triangle ABC$ có $S=10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p=10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

- A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}.$$

Câu 40. Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

- A. 16. B. 8. C. 4. D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2} = 42.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42} = 8.$$

Câu 41. Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

- A. $\frac{65}{8}$. B. 40. C. 32,5. D. $\frac{65}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = 84.$$

$$\text{Suy ra: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344.$$

$$\text{Mà } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = \frac{65}{2}.$$

Câu 42. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

- A. 6. B. 8. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 43. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$. Mà $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

Mặt khác $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2$.

Câu 44. Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Lời giải

Chọn A.

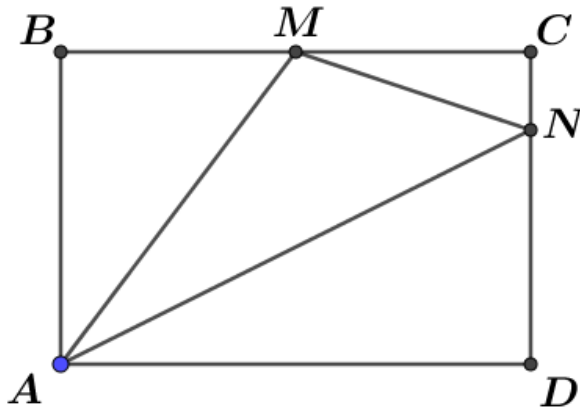
Ta có: $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow R = \frac{10}{2} = 5$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 45. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

$$BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$$

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - AN)(p - MN)} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác } AMN \text{ là: } R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Câu 46. Cho tam giác đều ABC ; gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$.

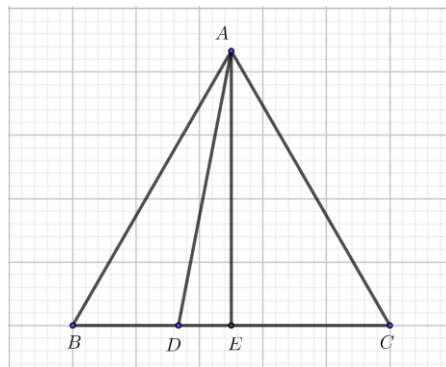
C. $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$.

D. $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$. Do đó $DC = 2DB$.



Gọi S là diện tích của tam giác ACD và E là trung điểm của BC .

$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Suy ra } \begin{cases} S = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \\ AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Hơn nữa } \begin{cases} S = \frac{AD+DC+AC}{2} \cdot r = \frac{5+\sqrt{7}}{6} a \cdot r \\ S = \frac{AD \cdot DC \cdot BC}{4R} = \frac{2a^3 \sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \frac{(5+\sqrt{7})ar \cdot 2a^3 \sqrt{7}}{6 \cdot 36R} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})a^4 r}{108R}.$$

$$\text{Hay } \frac{a^4}{12} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})a^4 r}{108R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7}) \cdot 12}{108} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})}{9}.$$

Câu 47. Cho tam giác ABC có $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, cạnh $BC = 12$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC gần với số nào nhất?

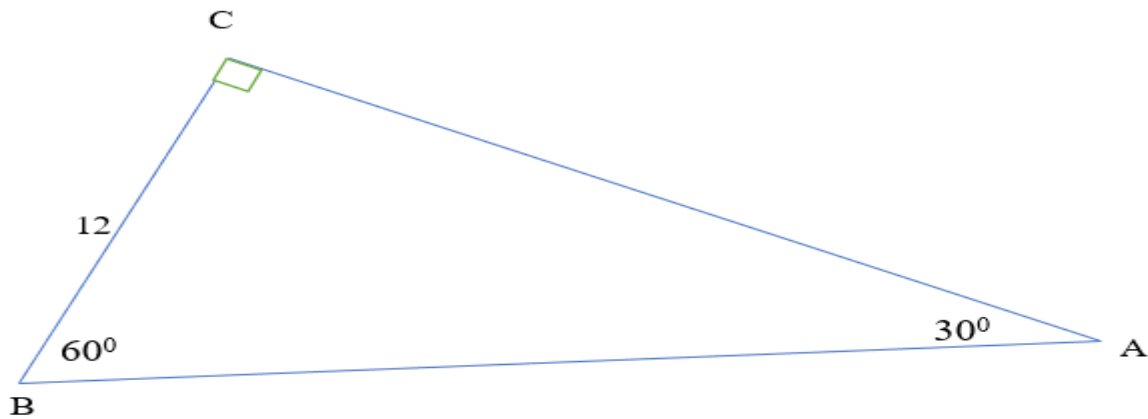
A. 4,6

B. 4,9.

C. 4,8.

D. 4,7

Lời giải



Ta có $AC = BC \cdot \tan B \Leftrightarrow AC = 12 \cdot \tan 60 = 12\sqrt{3}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta được $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = 24$.

$$\text{Nửa chu vi tam giác } p = \frac{24 + 12 + 12\sqrt{3}}{2} = 16 + 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } S_{\triangle ABC} = 72\sqrt{3} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} \approx 4,7.$$

Câu 48. Cho tam giác ABC có góc $A = 60^\circ$, cạnh $a = 30$, bán kính đường tròn nội tiếp $r = 5\sqrt{3}$. Tính chu vi của tam giác ABC .

A. $60 + 5\sqrt{3}$.

B. $30 + 10\sqrt{3}$.

C. 80.

D. 90.

Lời giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo định lý Sin ta có:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{30}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3}.$$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác và định lý Cosin ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{abc}{4R} = p \cdot r \\ b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \\ b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ = 30^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30 \cdot bc}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{30+b+c}{2} \cdot 5\sqrt{3} \\ b^2 + c^2 - bc = 900 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc = 10(30 + b + c) \\ (b + c)^2 - 3bc = 900 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} b + c = S \\ bc = P \end{cases} \quad (S, P > 0).$$

$$\text{Hệ trên trở thành: } \begin{cases} P = 10S + 300 \\ S^2 - 3P = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 10S + 300 \\ S^2 - 3(10S + 300) = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 10S + 300 \\ S^2 - 30S - 1800 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 10S + 300 \\ \begin{cases} S = 60 \\ S = -30 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 60 \\ P = 900 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} b + c = 60 \\ bc = 900 \end{cases} \Rightarrow b = c = 30.$$

Vậy chu vi tam giác ABC là: $a + b + c = 30 + 30 + 30 = 90$ (đvdd).

Câu 49. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai đường trung tuyến AM, BN của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

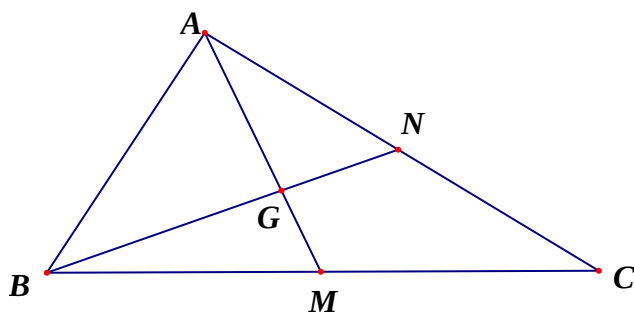
A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC khi đó ta có

$$\begin{aligned} AG^2 &= \frac{4}{9} AM^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \\ BG^2 &= \frac{4}{9} BN^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\hat{=} AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) + c^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\text{Theo bài ra } a^2 + b^2 = 5c^2 \Rightarrow AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{5c^2}{2} \right) + c^2 - \frac{5c^2}{4} = c^2 = AB^2$$

Suy ra tam giác ABG vuông tại G . Vậy góc giữa hai đường trung tuyến AM, BN của tam giác ABC bằng 90° .

Dạng 3. Bài toán thực tế

Câu 50. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

A. 13.

B. $20\sqrt{13}$.

C. $10\sqrt{13}$.

D. 15.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60 \text{ km}$.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80 \text{ km}$.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 51. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250 \text{ m}$, $CB = 120 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 266m.

B. 255m.

C. 166m.

D. 298m.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 250^2 + 120^2 - 2.250.120.\cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255$.

Câu 52. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB?

A. 71m.

B. 91m.

C. 79m.

D. 40m.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Trong tam giác vuông CDA: $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB: $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91 \text{ m}$.

Câu 53. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$. Biết $CA = 200 \text{ m}$, $CB = 180 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 180m.

B. 224m.

C. 112m.

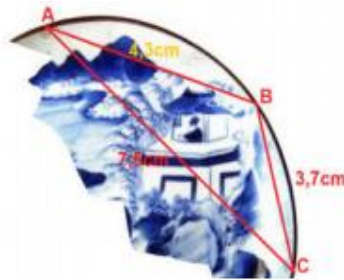
D. 168m.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^\circ 16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$.

Câu 54. Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3\text{ cm}$; $BC = 3,7\text{ cm}$; $CA = 7,5\text{ cm}$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng (kết quả làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy).



- A. 5,73 cm. B. 6,01cm. C. 5,85cm. D. 4,57cm.

Lời giải

Chọn A

Bán kính R của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Nửa chu vi của tam giác } ABC \text{ là: } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{2} \text{ cm.}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2 \text{ cm}^2.$$

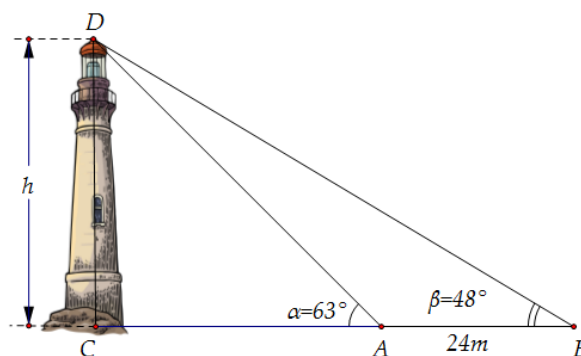
$$\text{Mà } S = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} \approx 5,73 \text{ cm.}$$

Câu 55. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{ m}$, $CAD = 63^\circ$; $CBD = 48^\circ$. Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 61,4 m. B. 18,5 m. C. 60 m. D. 18 m.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } CAD = 63^\circ \Rightarrow BAD = 117^\circ \Rightarrow ADB = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$$

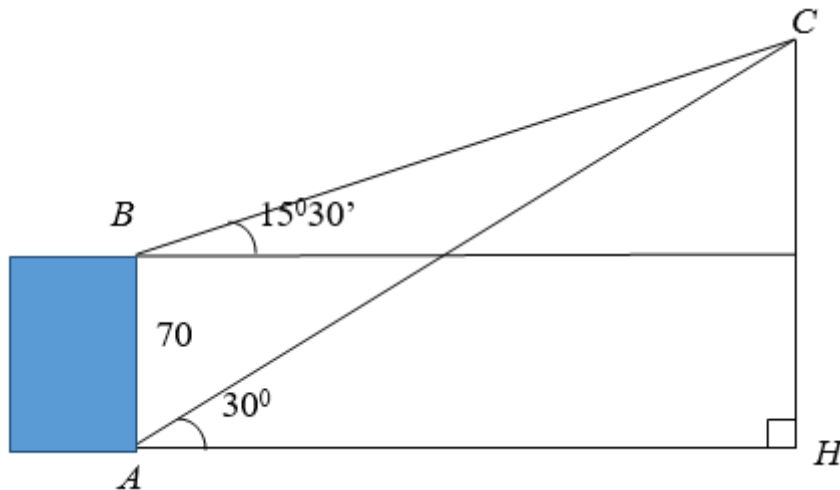
$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } ABD \text{ ta có: } \frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin BAD} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin BAD}{\sin ADB}$$

$$\text{Tam giác } BCD \text{ vuông tại } C \text{ nên có: } \sin CBD = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD \cdot \sin CBD$$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin BAD \cdot \sin CBD}{\sin ADB} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4 \text{ m}$$

- Câu 56.** Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng $70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị
A. $195m$. **B.** $234m$. **C.** $165m$. **D.** $135m$.

Lời giải



Ta có: $\hat{CBA} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$$\hat{ABC} = 90^\circ + 15^\circ 30' = 105^\circ 30'$$

$$\text{Đ } \hat{ACB} = 180^\circ - (105^\circ 30' + 60^\circ) = 14^\circ 30'$$

Áp dụng định lí Sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,41.$$

$$\text{Xét } \triangle ACH \text{ có: } \sin 30^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 30^\circ = 134,71(m).$$